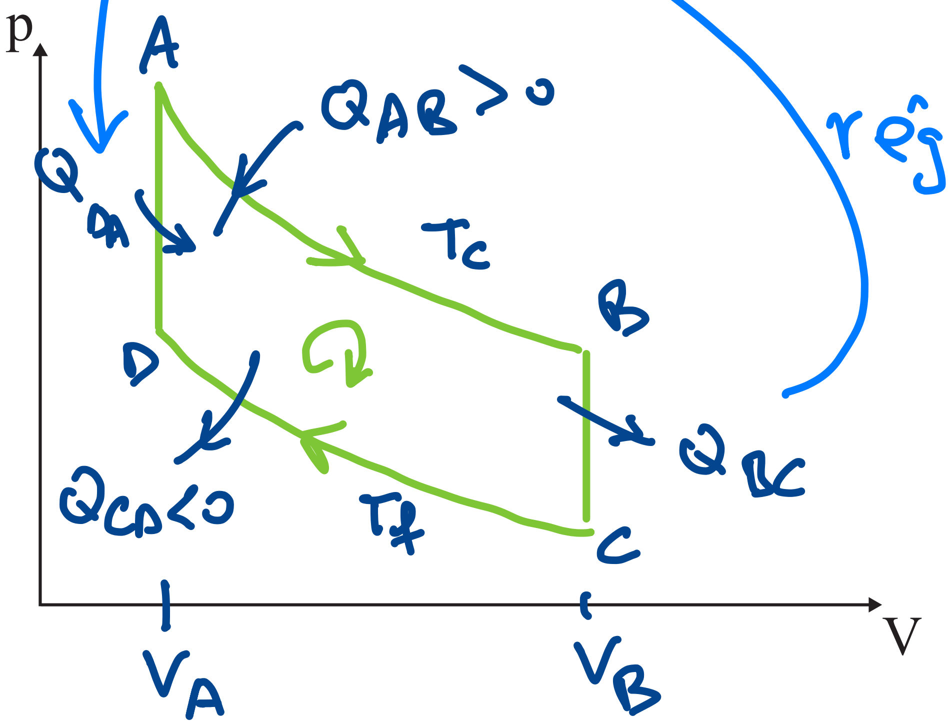
Cycle de Stirling (Examen 2015)

On s'intéresse à un moteur de Stirling fonctionnant avec une mole de gaz parfait. On rappelle que le cycle de Stirling est composé de deux isothermes et deux isochores. On appelle respectivement T_c et T_f les températures chaude et froide des isothermes. On notera A, B, C et D les points du cycle de manière que V_A soit le volume minimal et V_B le volume maximal.

1. Tracez le cycle (quasi-statique) ~~(réversible)~~ dans un diagramme (p,V) ; identifiez le sens de parcours et les points ABCD.



2. Le piston moteur (qui est en jeu dans les isothermes) subit maintenant un frottement sec. On suppose les coefficients de frottement statiques et dynamiques égaux ; les frottements se traduisent par une force de norme F durant tout le trajet du piston, qui se fait sur une longueur l. Les transformations sont quasi-statiques. On néglige la capacité calorifique du piston devant celle du gaz, que l'on note C_v. La partie mobile du piston est calorifugée et ne permet pas d'échange de chaleur avec l'extérieur. Un régénérateur permet de recycler toute la chaleur entre les isochores.
~~La transformation le long des isothermes est-elle réversible ? Justifiez.~~

quasi-statique
- équilibre thermodynamique
  P, T bien définis
- suite d'états à l'équilibre
  $\sum \vec{F} = \vec{0}$

mais ⚠ il faut utiliser $P_{ext} \neq P$

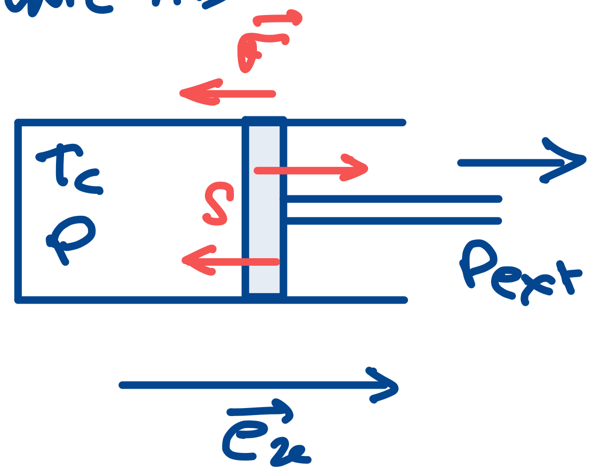
$\delta W = -P_{ext}\, dV$

Suggestion pour la question 3 : Commencez par déterminer la relation entre la pression P à l'intérieur du cylindre et la pression extérieure P_ext.

3. Calculez les travaux W_{AB} et W_{CD} reçus par le gaz le long des isothermes, en tenant compte des frottements secs.

Les résultats sont à donner en fonction de V_{A}, V_{B}, T_{f}, T_{c}, C_v, F, l et R et à synthétiser dans le tableau ci-dessous. Pour les calculs intermédiaires, on pourra noter P la pression du gaz et P_{ext} la pression appliquée sur le piston par l'extérieur.

détente AB



$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$
$$= -F\vec{e}_x + SP\vec{e}_x - SP_{ext}\vec{e}_x = \vec{0}$$
$$0 = -F + SP - SP_{ext}$$
$$\boxed{P_{ext} = P - \frac{F}{S}}$$

$$W_{AB} = \int_A^B -P_{ext}\, dV$$

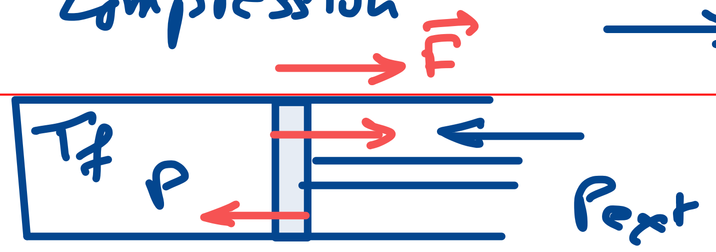
$$= \int_A^B -p\, dV + \int_A^B \frac{F}{S}\, \underbrace{S.dx}_{dV}$$

$$= -nRT_c \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} + \int_{x_A}^{x_B} F.dx$$

$$= -nRT_c \ln \frac{V_B}{V_A} + F.\underbrace{(x_B - x_A)}_{e}$$

$$\boxed{W_{AB} = -nRT_c \ln \frac{V_B}{V_A} + \underbrace{Fe}_{>0}}$$

CD compression $\longrightarrow \vec{e_x}$



$$\vec{F_{ex}} + SP\vec{e_x} - SP_{ext}\vec{e_x} = \vec{0}$$

$$F + PS - SP_{ext} = 0$$

$$P_{ext} = P + \frac{F}{S}$$

$$W_{CD} = \int_C^D -P_{ext}\, dV = \int_C^D -p\, dV - \int_C^D \frac{F}{S}.S.dx$$

$$= -nRT_f \int_{V_C}^{V_D} \frac{dV}{V} - \int_{x_C}^{x_D} F dx$$

$$-F.\underbrace{(x_D - x_C)}_{=-e}$$

$$\boxed{W_{CD} = -nRT_f \ln \frac{V_A}{V_B} + \underbrace{F.e}_{>0}}$$

4. Calculez Q et ΔU le long de ces mêmes isothermes.

Gaz parfait Loi de Joule $\Delta U = 0 = Q + W$

$Q = -W$

$$\boxed{\begin{array}{l} Q_{AB} = -W_{AB} \\ Q_{CD} = -W_{CD} \end{array}}$$

6. Calculez W, Q, ΔU et ~~ΔS~~ le long des isochores. DA et BC

$V = cst$ $W = \boxed{0 = W_{DA} = W_{BC}}$

$\Delta U = Q + W = Q$

$Q_{DA} = \Delta U_{DA} = C_V (T_A - T_D)$ Loi de Joule GP

$= C_V (T_c - T_f)$

$$\boxed{Q_{DA} = n C_{Vm} (T_c - T_f)}$$

$Q_{BC} = \Delta U_{BC} = n C_{Vm} (T_c - T_B)$

$$\boxed{Q_{BC} = n C_{Vm} (T_f - T_c)}$$

$Q_{BC} = -Q_{DA}$

régénération

	isotherme	isochore	isotherme	isochore
	$A \to B$	$B \to C$	$C \to D$	$D \to A$
W	$-nRT_c \ln\frac{V_B}{V_A} + F_e$	0	$-nRT_f \ln\frac{V_A}{V_B} + F_e$	0
Q	$nRT_c \ln\frac{V_B}{V_A} - F_e$	$nC_{V_m}(T_f - T_c)$	$nRT_f \ln\frac{V_A}{V_B} - F_e$	$nC_{V_m}(T_c - T_f)$
ΔU	0	$nC_{V_m}(T_f - T_c)$	0	$nC_{V_m}(T_c - T_f)$
ΔS	....	....	....	....

7. Quelle est la condition sur F pour que le moteur fonctionne ? Que se passe-t-il sinon ?
En supposant cette condition remplie, quelle est l'efficacité η du moteur ?

moteur $W_{tot} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} < 0$

$$= -nR(T_c - T_f)\ln\frac{V_B}{V_A} + 2Fe < 0$$

$$\boxed{F < \frac{nR(T_c - T_f)}{2e}\ln\frac{V_B}{V_A}}$$

$F > 0$
F ∝ force ✓

$$\boxed{\eta = \frac{-W_{tot}}{Q_{AB}} = \frac{nR(T_c-T_f)\ln\frac{V_B}{V_A} - 2Fe}{nRT_c\ln\frac{V_B}{V_A} - Fe}}$$

Si $F = 0$
$\eta = \eta_{Carnot} = \frac{T_c - T_f}{T_c}$ ✓

$\eta < \eta_{carnot}$?

$$\frac{nR(T_c - T_f)\ln\frac{V_B}{V_A} - 2Fe}{nRT_c\ln\frac{V_B}{V_A} - Fe} < \frac{T_c - T_f}{T_c}$$

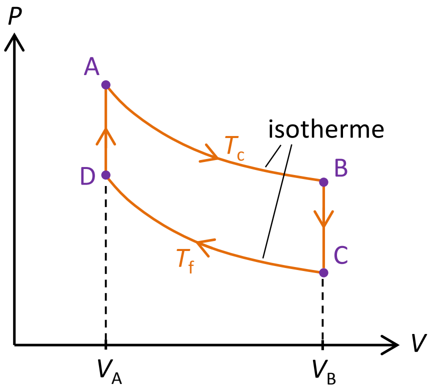
$$\cancel{nRT_c(T_c - T_f)\ln\frac{V_B}{V_A}} - 2\cancel{Fe}\,T_c < \cancel{nRT_c(T_c - T_f)\ln\frac{V_B}{V_A}} - \cancel{Fe}(T_c - T_f)$$

$$-2T_c < T_c - T_f$$

$$\underline{T_f < 3T_c} \quad \checkmark$$

Solution

1.

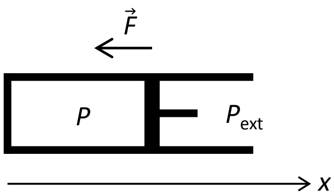


2. La transformation est irréversible car des forces dissipatives sont en jeu.
3. Le piston subit un frottement sec le long des isothermes. Il faut en tenir compte dans le calcul du travail. Puisque l'on a une transformation irréversible, le travail se calcule comme :

$$\delta W = -p_{\text{ext}} \mathrm{d}V \quad \Rightarrow \quad W_{\text{AB}} = \int_{\text{A}}^{\text{B}} -p_{\text{ext}} \, \mathrm{d}V.$$

Transformations quasi-statiques : $\sum \vec{F} = \vec{0}$.

Transformation A→B : détente



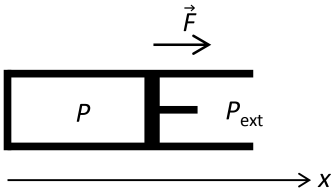
$$\begin{aligned} & \sum \vec{F} = -F\vec{e}_x + SP\vec{e}_x - SP_{\text{ext}}\vec{e}_x = \vec{0} \\ \Rightarrow \quad & -F + SP - SP_{\text{ext}} = 0 \\ \Rightarrow \quad & P_{\text{ext}} = P - \frac{F}{S}, \end{aligned}$$

avec S la surface du piston. On en déduit :

$$\begin{aligned}
W_{\mathrm{AB}} &= \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} -P\,\mathrm{d}V + \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{F}{S}\,S\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{nRT_{\mathrm{c}}}{V}\,\mathrm{d}V + Fl \\
&= -nRT_{\mathrm{c}} \ln\left(\frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}}\right) + Fl.
\end{aligned}$$

Remarque : $Fl > 0$, le travail est moins grand en norme.

Transformation C→D : compression, les frottements s'opposent au mouvement



$$\begin{aligned}
&\sum \vec{F} = F\vec{e}_x + SP\vec{e}_x - SP_{\mathrm{ext}}\vec{e}_x = \vec{0} \\
\Rightarrow\quad & P_{\mathrm{ext}} = P + \frac{F}{S},
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
W_{\mathrm{CD}} &= \int_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}} -P\,\mathrm{d}V - \int_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}} \frac{F}{S}\,S\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}} \frac{nRT_{\mathrm{f}}}{V}\,\mathrm{d}V - F(-l) \\
&= -nRT_{\mathrm{f}} \ln\left(\frac{V_{\mathrm{A}}}{V_{\mathrm{B}}}\right) + Fl.
\end{aligned}$$

4. Sur une isotherme d'un gaz parfait, on a : $\Delta U = 0$ et donc $Q = -W$. On en déduit que $\Delta U_{\mathrm{AB}} = \Delta U_{\mathrm{CD}} = 0$, $Q_{\mathrm{AB}} = -W_{\mathrm{AB}}$ et $Q_{\mathrm{CD}} = -W_{\mathrm{CD}}$.
5. Pour calculer ΔS_{AB}, on considère un chemin réversible entre les points A et B. Soit une isotherme réversible entre ces deux points. Le travail reçu par le gaz vaut :

$$W_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{rév}} = -nRT_{\mathrm{c}} \ln\left(\frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}}\right),$$

d'où :

$$Q_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{rév}} = nRT_{\mathrm{c}} \ln\left(\frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}}\right).$$

Sachant que la transformation est isotherme et que l'entropie est une variable d'état, on en déduit :

$$\Delta S_{\mathrm{AB}} = \Delta S_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{rév}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{\delta Q^{\mathrm{rév}}}{T} = \frac{Q_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{rév}}}{T_{\mathrm{c}}} = nR \ln\left(\frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}}\right).$$

De même, le long de l'isotherme CD, on trouve :

$$\Delta S_{\mathrm{CD}} = \Delta S_{\mathrm{CD}}^{\mathrm{rév}} = \frac{Q_{\mathrm{CD}}^{\mathrm{rév}}}{T_{\mathrm{f}}} = -nR \ln\left(\frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}}\right).$$

Remarque : $S_{\mathrm{AB}}^{\text{éch}} = \dfrac{Q_{\mathrm{AB}}}{T_{\mathrm{c}}} = \underbrace{nR\ln\left(\dfrac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}}\right)}_{\Delta S} - \underbrace{\dfrac{Fl}{T_{\mathrm{c}}}}_{S_{\mathrm{AB}}^{\text{créée}}}$.

On a bien $S_{\mathrm{AB}}^{\text{créée}} > 0$.

6. Le long d'une isochore d'un gaz parfait, on a $W = 0$, et donc $\Delta U = nc_v\Delta T = Q$. Ainsi : $W_{\mathrm{BC}} = 0$, $W_{\mathrm{DA}} = 0$, $\Delta U_{\mathrm{BC}} = nc_v(T_{\mathrm{f}} - T_{\mathrm{c}}) = Q_{\mathrm{BC}}$ et $\Delta U_{\mathrm{DA}} = nc_v(T_{\mathrm{c}} - T_{\mathrm{f}}) = Q_{\mathrm{DA}}$. De plus, les transformations isochores étant réversibles, on a :

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T} = \int \frac{\mathrm{d}U}{T} = \int \frac{nc_v\mathrm{d}T}{T}.$$

On en déduit :

$$\Delta S_{\mathrm{BC}} = nc_v \ln\left(\frac{T_{\mathrm{f}}}{T_{\mathrm{c}}}\right), \quad \Delta S_{\mathrm{DA}} = nc_v \ln\left(\frac{T_{\mathrm{c}}}{T_{\mathrm{f}}}\right).$$

	$A \to B$	$B \to C$	$C \to D$	$D \to A$
W	$-nRT\ln\left(\frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}}\right) + Fl$	0	$nRT\ln\left(\frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}}\right) + Fl$	0
Q	$nRT\ln\left(\frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}}\right) - Fl$	$nc_v(T_{\mathrm{f}} - T_{\mathrm{c}})$	$-nRT\ln\left(\frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}}\right) - Fl$	$nc_v(T_{\mathrm{c}} - T_{\mathrm{f}})$
ΔU	0	$nc_v(T_{\mathrm{f}} - T_{\mathrm{c}})$	0	$nc_v(T_{\mathrm{c}} - T_{\mathrm{f}})$
ΔS	$nR\ln\left(\frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}}\right)$	$nc_v\ln\left(\frac{T_{\mathrm{f}}}{T_{\mathrm{c}}}\right)$	$-nR\ln\left(\frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}}\right)$	$nc_v\ln\left(\frac{T_{\mathrm{c}}}{T_{\mathrm{f}}}\right)$

7. Le travail reçu par le gaz au cours d'un cycle vaut :

$$W_{\mathrm{tot}} = W_{\mathrm{AB}} + W_{\mathrm{BC}} + W_{\mathrm{CD}} + W_{\mathrm{DA}} = -(T_{\mathrm{c}} - T_{\mathrm{f}})nR\ln\left(\frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}}\right) + 2Fl.$$

Pour que le moteur fonctionne, il faut que $W_{\mathrm{tot}} < 0$, c'est-à-dire :

$$F < \frac{T_{\mathrm{c}} - T_{\mathrm{f}}}{2l} nR\ln\left(\frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}}\right).$$

8. $\eta = \dfrac{|W_{\mathrm{tot}}|}{Q_{\mathrm{AB}}} = \dfrac{(T_{\mathrm{c}} - T_{\mathrm{f}})nR\ln\left(\dfrac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}}\right) - 2Fl}{nRT\ln\left(\dfrac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}}\right) - Fl}$